



Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin Programul Operațional Capital Uman 2014-2020

Axa prioritară 6: *Educație și competențe*

Prioritatea de investiții 10.i: *Reducerea și prevenirea abandonului școlar timpuriu și promovarea accesului egal la învățământul preșcolar, primar și secundar de calitate, inclusiv la parcursuri de învățare formale, nonformale și informale pentru reintegrarea în educație și formare*

Obiectivul specific 6.4: *Creșterea numărului de tineri care au abandonat școala și de adulți care nu și-au finalizat educația obligatorie care se reîntorc în sistemul de educație și formare, inclusiv prin programe de tip a doua șansă și programe de formare profesională*

Obiectivul specific 6.6: *Îmbunătățirea competențelor personalului didactic din învățământul preuniversitar în vederea promovării unor servicii educaționale de calitate orientate pe nevoile elevilor și a unei școli inclusive*

Titlu proiect: *“Acces la programe de educație și formare profesională pentru tinerii și adulții din județul Dolj care au părăsit timpuriu școala (I)”*

Cod SMIS 2014+: 135711

MATERIALE DE PREDARE-ÎNVĂȚARE MATEMATICĂ

Modulul M1

Program „A doua șansă” pentru învățământ secundar inferior versiune finală

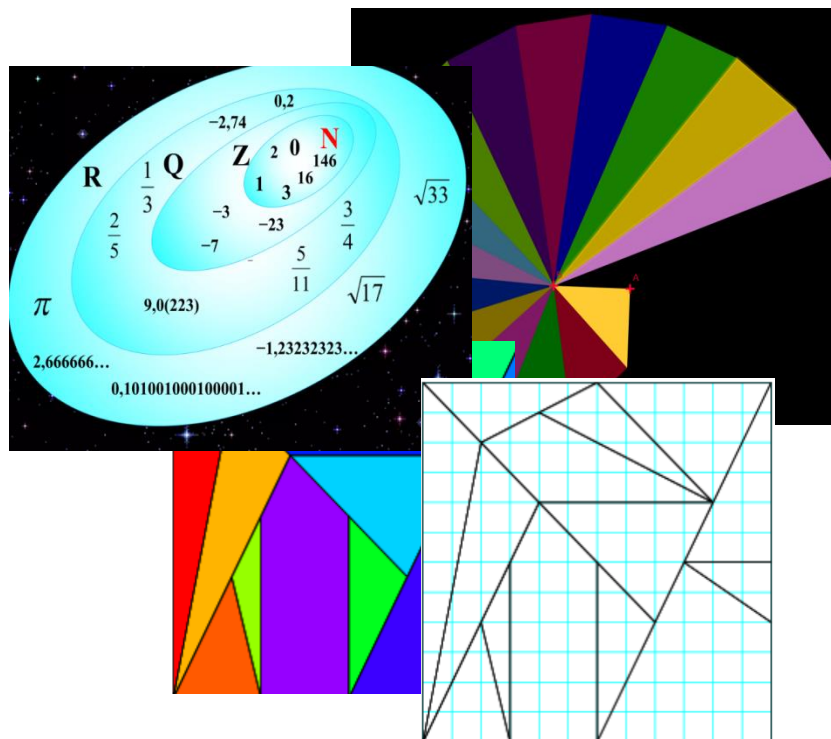
A.3.1 Organizarea, monitorizarea și evaluarea programului „A doua șansă” și a stagiilor de pregătire practică de 720 de ore

POPESCU LUMINIȚA VIORICA CRISTINA
Expert curriculum (Matematică)






Decembrie 2022

Conținutul acestui material nu reprezintă în mod obligatoriu poziția oficială a Uniunii Europene sau a Guvernului României

MULȚIMEA NUMERELOR REALE



La finalul unității de învățare, elevul va fi capabil:

-  să scrie și să citească numere reale;
-  să compare și să ordoneze numere reale;
-  să reprezinte pe axă numere reale;
-  să efectueze calcule cu numere reale (raționale și iraționale);
-  să rezolve probleme cu reale.











Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect

Un număr natural a se numește **pătrat perfect** dacă există un număr natural n astfel încât $n^2 = a$.

Dacă a este un număr natural pătrat perfect atunci numărul natural n cu proprietatea $n^2 = a$ se numește **rădăcina pătrată a numărului a** .

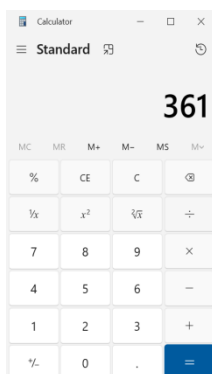
Rădăcina pătrată a numărului natural a se notează $n = \sqrt{a}$ și se citește „**radical din a** ”.

Exemple:

-  $\sqrt{9} = 3$, deoarece $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
-  $\sqrt{64} = 8$, deoarece $8^2 = 8 \cdot 8 = 64$
-  $\sqrt{1} = 1$, deoarece $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$
-  $\sqrt{0} = 0$, deoarece $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$
-  $\sqrt{100} = 10$, deoarece $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$
-  $\sqrt{17^2} = 17$
-  $\sqrt{43^2} = 43$
-  $\sqrt{361} = 19$, deoarece $19^2 = 19 \cdot 19 = 361$
-  Dacă $\sqrt{a} = 14$ atunci $a = 14^2 = 14 \cdot 14 = 196$
-  Dacă $\sqrt{a} = 23$ atunci $a = 23^2 = 23 \cdot 23 = 529$

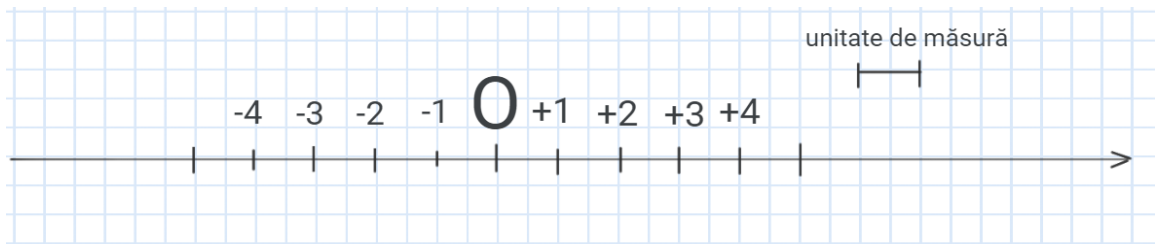


Pentru a calcula rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect putem folosi un minicalculator, sau aplicația „calculator” a telefonului mobil astfel: **scriem numărul**, apăsăm tasta „**radical**” apoi tasta „**=**”.




Ne amintim!

Valoarea absolută sau **modulul unui număr a** este distanța de la origine la punctul ce îi corespunde numărului a pe axa numerelor. Se notează $|a|$.



Exemple:

 Modulul lui +3 este 3 și scriem $|+3| = |3| = 3$.


 Modulul lui -2 este 2 și scriem $|-2| = 2$.




Dacă a este un număr natural pătrat perfect diferit de 0, atunci există două numere distincte al căror pătrat este a , \sqrt{a} și $-\sqrt{a}$.

Dacă a este un număr întreg atunci $\sqrt{a^2} = |a|$.

Exemple:

 $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

 $\sqrt{(-11)^2} = |-11| = 11$

Să exersăm !

1. Calculați:

a) $\sqrt{4} =$ _____

f) $\sqrt{100} =$ _____

b) $\sqrt{36} =$ _____

g) $\sqrt{400} =$ _____

c) $\sqrt{36} =$ _____

h) $\sqrt{900} =$ _____

d) $\sqrt{25} =$ _____

i) $\sqrt{79^2} =$ _____

e) $\sqrt{81} =$ _____

j) $\sqrt{121^2} =$ _____

2. Calculați folosind minicalculatorul sau aplicația „calculator” a telefonului mobil:

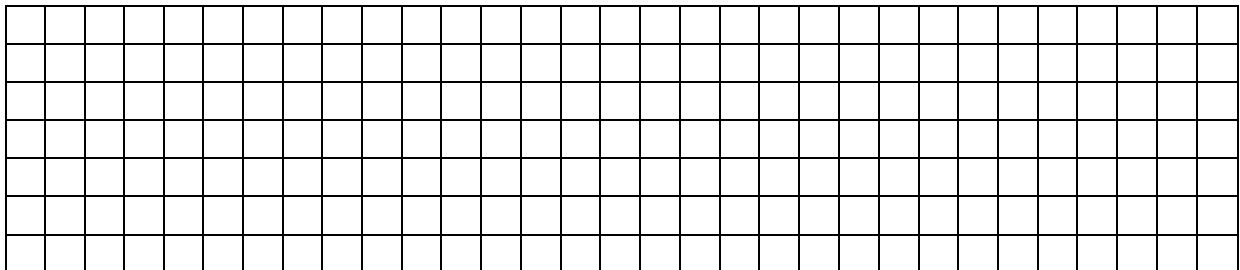


- a) $\sqrt{441} =$ _____ e) $\sqrt{1369} =$ _____
 b) $\sqrt{2025} =$ _____ f) $\sqrt{961} =$ _____
 c) $\sqrt{2209} =$ _____ g) $\sqrt{1936} =$ _____
 d) $\sqrt{625} =$ _____ h) $\sqrt{841} =$ _____

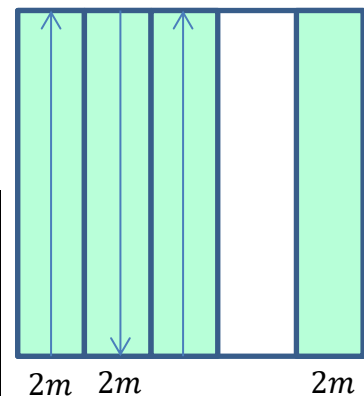
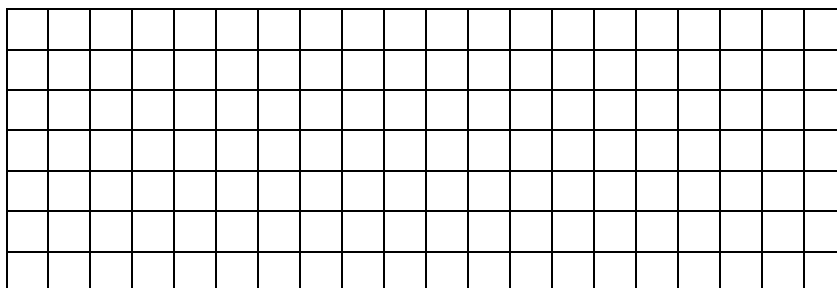
3. Folosind eventual minicalculatorul sau aplicația „calculator” a telefonului mobil stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor afirmații:

- a) $\sqrt{19^2} = 19$ A / F e) $\sqrt{18^2} = 18$ A / F
 b) $\sqrt{1024} = 32$ A / F f) $\sqrt{(-4)^2} = -4$ A / F
 c) $\sqrt{25^2} = 5$ A / F g) $\sqrt{(-49)^2} = 7$ A / F
 d) $\sqrt{19^2} = 19$ A / F h) $\sqrt{(-7)^2} = 7$ A / F

4. Dacă grădina Mariei are suprafața de $1ha$ și formă pătrată, determinați lungimea acesteia. ($1ha = 10000 m^2$)



5. Într-o zi un tractor ară o suprafață pătrată de $16 ha$. Determinați ce distanță parcurge tractorul dacă **lungimea/lățimea** plugului este de $2 m$ și parcurge suprafața ca în figura alăturată.



Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv



✓ **Rădăcina pătrată a numărului rațional pozitiv a** este numărul pozitiv x cu proprietatea $x^2 = a$.

✓ Rădăcina pătrată a numărului **rațional pozitiv a** se notează $x = \sqrt{a}$ și se citește „**radical din a** ”.

Exemple:

$$\sqrt{\left(\frac{17}{35}\right)^2} = \frac{17}{35}$$

$$\sqrt{\left(\frac{43}{15}\right)^2} = \frac{43}{15}$$

$$\sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{3}{8} \text{ deoarece } \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$$

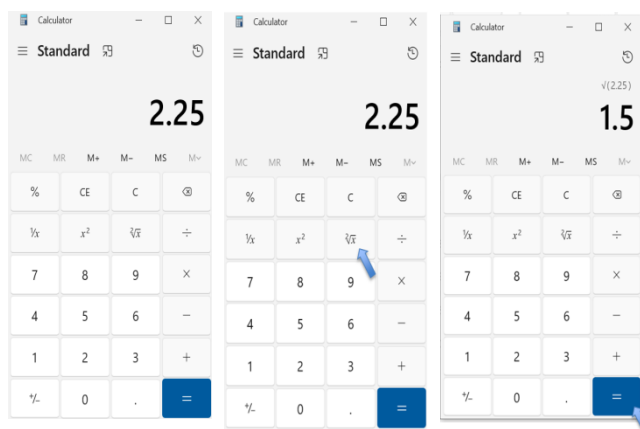
$$\sqrt{\frac{81}{49}} = \frac{9}{7} \text{ deoarece } \left(\frac{9}{7}\right)^2 = \frac{9}{7} \cdot \frac{9}{7} = \frac{81}{49}$$

$$\sqrt{0,64} = 0,8 \text{ deoarece } \sqrt{0,64} = \sqrt{\frac{64}{100}} = \sqrt{\left(\frac{8}{10}\right)^2} = \frac{8}{10} = 0,8$$

$$\sqrt{0,09} = 0,3 \text{ deoarece } \sqrt{0,09} = \sqrt{\frac{9}{100}} = \sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2} = \frac{3}{10} = 0,3$$



Pentru a calcula rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv putem folosi un minicalculator, sau aplicația „calculator” a telefonului mobil astfel: **scriem numărul**, apăsăm tasta „**radical**” apoi tasta „**=**”.





- ✓ Dacă a este un număr rațional pozitiv atunci:
 - $\sqrt{a} \geq 0$
 - $(\sqrt{a})^2 = a$
- ✓ Pentru orice număr rațional a avem $\sqrt{a^2} = |a|$.

Să exersăm !

1. Calculați, folosind eventual minicalculatorul sau aplicația „calculator” a telefonului mobil:

a) $\sqrt{\frac{25}{16}} = \underline{\hspace{2cm}}$

f) $\sqrt{\frac{4}{49}} = \underline{\hspace{2cm}}$

b) $\sqrt{0,04} = \underline{\hspace{2cm}}$

g) $\sqrt{38,44} = \underline{\hspace{2cm}}$

c) $\sqrt{5,23} = \underline{\hspace{2cm}}$

h) $\sqrt{50,653} = \underline{\hspace{2cm}}$

d) $\sqrt{56,25} = \underline{\hspace{2cm}}$

i) $\sqrt{0,81} = \underline{\hspace{2cm}}$

e) $\sqrt{0,01} = \underline{\hspace{2cm}}$

j) $\sqrt{(-0,25)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$

2. Folosind eventual minicalculatorul sau aplicația „calculator” a telefonului mobil, stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor afirmații:

a) $\sqrt{\frac{49}{16}} = \frac{7}{4}$ A / F

d) $\sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{4}{25}$ A / F

b) $\sqrt{(-0,7)^2} = 0,49$ A / F

e) $\sqrt{0,0009} = 0,3$ A / F

c) $\sqrt{0,64} + \sqrt{0,36} = 1$ A / F

f) $\sqrt{(-0,5)^2} + \sqrt{0,5^2} = 0$ A / F

3. Stabiliți care dintre următoarele numere sunt raționale și care sunt iraționale: $0,7$, 2π , $\sqrt{3}$, $\sqrt{9}$, $-4,05$, $\sqrt{0,25}$, $\sqrt{4,9}$, $-\pi$, completând tabelul de mai jos:

Numere raționale										Numere iraționale									

4. Dan vrea să își împrejnuiască grădina de formă pătrată care are o suprafață de $128020,84 \text{ m}^2$. Determinați lungimea totală a gardului ?

Multimea numerelor reale. Scriere, citire, comparare, reprezentare pe axă prin aproximări

Ne amintim!

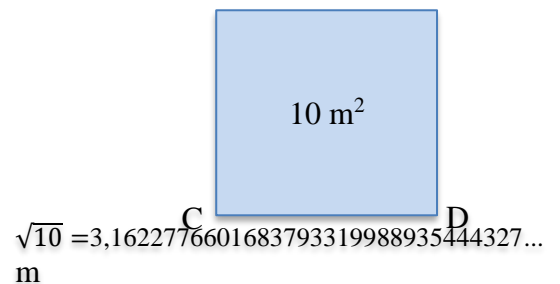
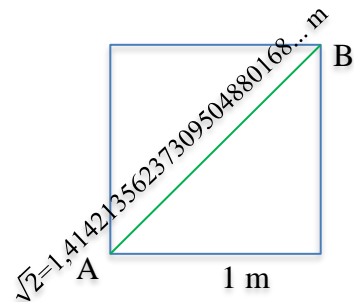
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ reprezintă mulțimea numerelor naturale

$\mathbb{Z} = \{\dots - 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ reprezintă mulțimea numerelor întregi

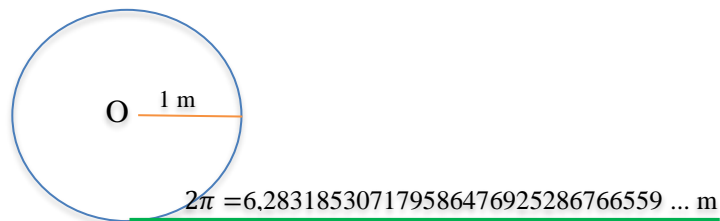
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \text{ sunt numere întregi, } b \neq 0 \right\}$ reprezintă mulțimea numerelor raționale.

Din situații practice se găsesc numere care nu fac parte din aceste mulțimi. De exemplu:

- Diagonala (distanța AB) unei suprafețe pătrate cu latura de 1 m .
- Latura unei suprafețe pătrate aria de 10 m².






- Lungimea cercului cu raza de 1 m.



- $\sqrt{3} = 1,7320508075688772935274463415059 \dots$

- ! Toate aceste numere se numesc numere iraționale.
 ! Împună numerele ratiionale și numerele iraționale formează mulțimea numerelor reale, notată \mathbb{R} .

Exemple:(de numere iraționale)

-  1,02002000200002000002
-  $\sqrt{7} = 2,6457513110645905905016157536393 ...$
-  $\pi = 3,1415926535897932384626433832795 ...$



Mulțimea numerelor reale include mulțimea numerelor raționale(orice număr rațional este și număr real).

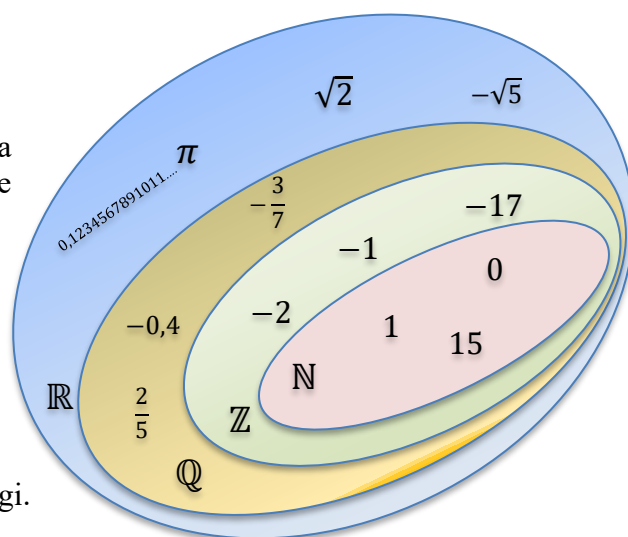
Există numere reale care nu sunt ratiionale.
 ($\pi, \sqrt{2}, -\sqrt{5}$)

Mulțimea numerelor raționale include mulțimea numerelor întregi(orice număr întreg este și număr rațional).

Există numere raționale care nu sunt întregi.
 ($0,2, \frac{1}{3}, -\frac{3}{7}$).

Mulțimea numerelor întregi include mulțimea numerelor naturale(orice număr natural este și număr întreg).

Există numere întregi care nu sunt naturale. ($-2, -1, -17$).



Să ne amintim!

Rotunjirea este o aproximare prin lipsă (înlocuirea numărului cu un număr mai mic sau egal) sau o aproximare prin adaos (înlocuirea numărului cu un număr mai mare) care se face astfel:

- se citește cifra din dreapta ordinului la care se face rotunjirea;
- ◇ dacă aceasta este 0, 1, 2, 3 sau 4, atunci ea și cifrele care urmează se înlocuiesc cu 0 (se neglijează);
- ◇ dacă aceasta este 5, 6, 7, 8 sau 9, atunci ea și cifrele care urmează se înlocuiesc cu 0, iar cifra ordinului la care se face rotunjirea se mărește cu o unitate.

Reprezentarea pe axa numerelor reale

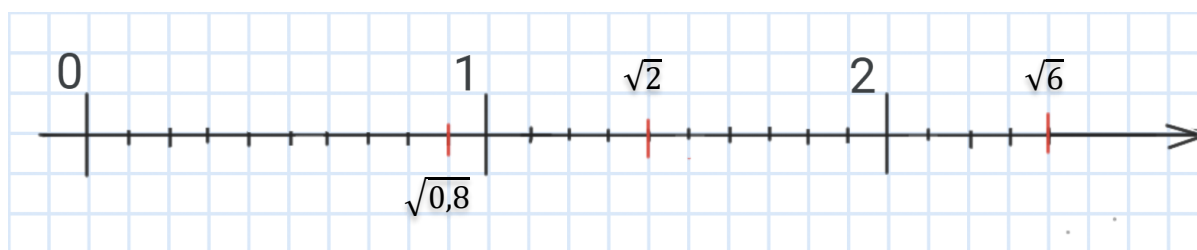


Pentru a reprezenta pe axă o un număr real îl rotunjim la un ordin potrivit (zecimi, sutimi) apoi reprezentăm pe axă fracția zecimală obținută e.t.c..

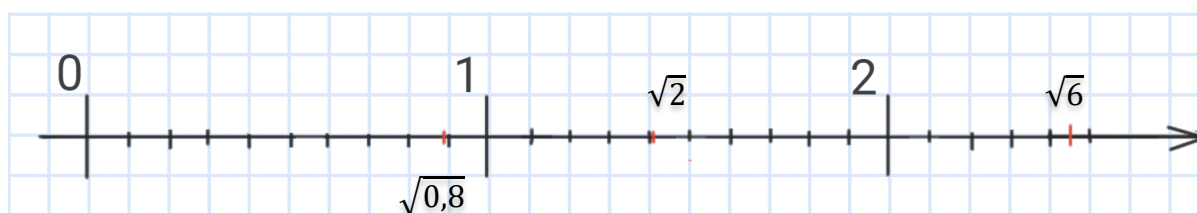
Exemple:

Numărul dat	Ordinul la care se face rotunjirea	
	zecimi	sutimi
$\sqrt{2} = 1,414213 \dots$	1,4	1,41
$\sqrt{6} = 2,449489 \dots$	2,4	2,45
$\sqrt{0,8} = 0,894427 \dots$	0,9	0,89

Reprezentarea pe axă a numerelor reale rotunjite la ordinul zecimilor



Reprezentarea pe axă a numerelor reale rotunjite la ordinul sutimilor



Compararea numerelor reale

✓ Metoda 1. Reprezentând numerele pe axa reală

Dintre două numere reprezentate pe axa numerelor este mai mic cel situat în stânga.

✓ Metoda 2. Comparând rotunjirile la fracții zecimale

- Orice număr real pozitiv este mai mare decât orice număr real negativ.
- Pentru a compara două numere reale pozitive le scriem ca fracții zecimale pozitive și procedăm astfel:

Comparăm părțile întregi:



Intervale de numere reale

Intervale mărginite

Intervalul deschis a, b notat (a, b) reprezintă mulțimea numerelor reale x cu proprietatea $a < x < b$.



Intervalul închis a, b notat $[a, b]$ reprezintă mulțimea numerelor reale x cu proprietatea $a \leq x \leq b$.



Intervalul închis la stânga deschis la dreapta a, b notat $[a, b)$ reprezintă mulțimea numerelor reale x cu proprietatea $a \leq x < b$.



Intervalul deschis la stânga închis la dreapta a, b notat $(a, b]$ reprezintă mulțimea numerelor reale x cu proprietatea $a < x \leq b$.



Intervale nemărginite

Intervalul deschis minus infinit b notat $(-\infty, b)$ reprezintă mulțimea numerelor reale x cu proprietatea $x < b$.



Intervalul închis minus infinit b notat $(-\infty, b]$ reprezintă mulțimea numerelor reale x cu proprietatea $x \leq b$.




Intervalul deschis a plus infinit notat (a, ∞) reprezintă mulțimea numerelor reale x cu proprietatea $a < x$.



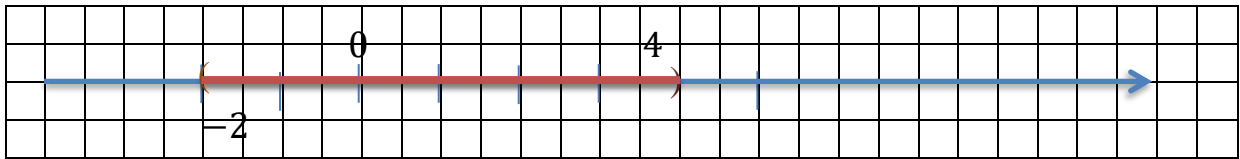
Intervalul închis *a plus infinit* notat $[a, \infty)$ reprezintă mulțimea numerelor reale x cu proprietatea $a \leq x$.



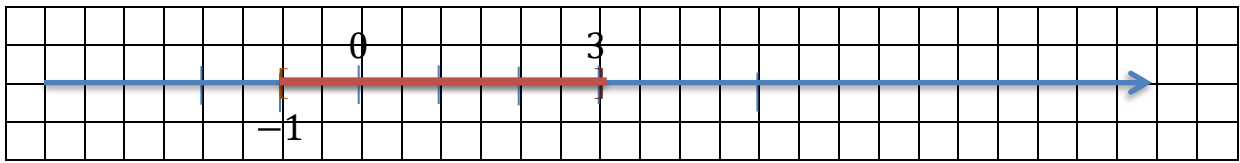
Exemple:

 Reprezentați pe axa numerelor reale intervalele

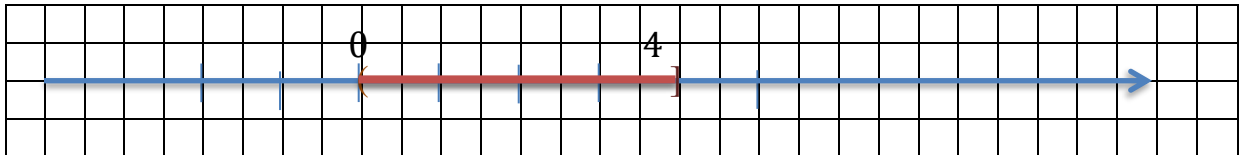
- $(-2, 4)$



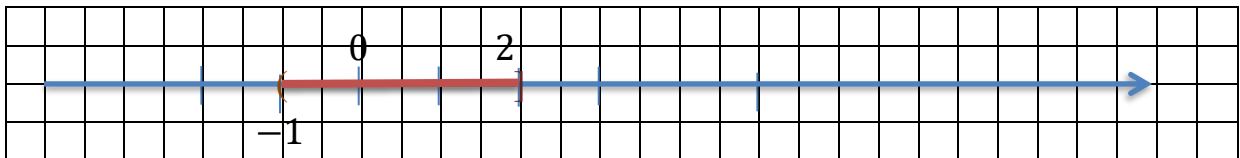
- $[-1, 3]$



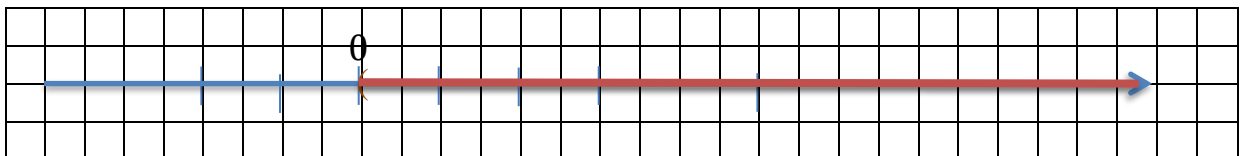
- $(0, 4]$



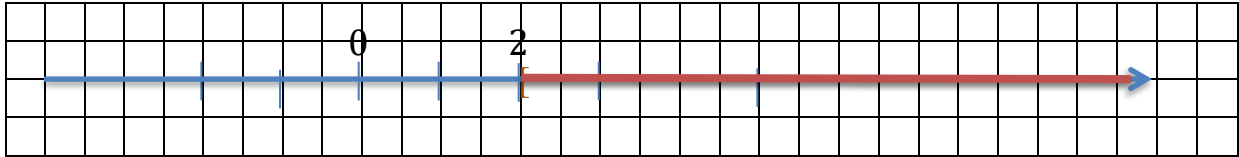
- $[-1, 2)$



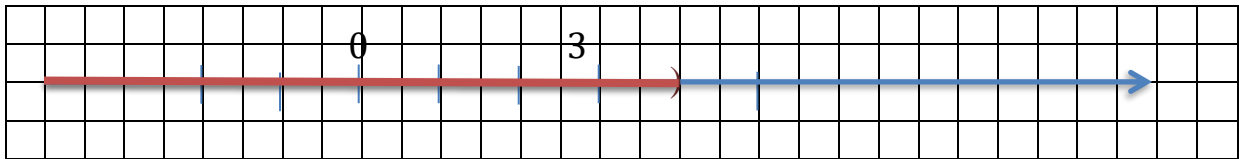
- $(0, \infty)$



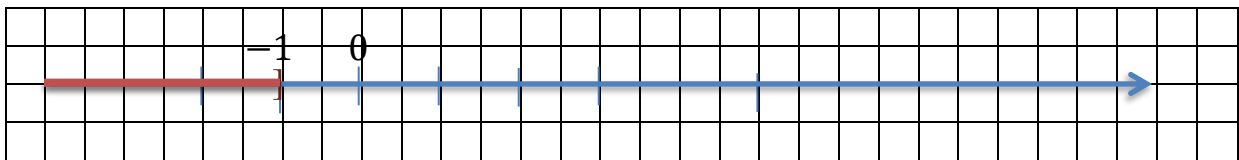
- $[2, \infty)$



- $(-\infty, 3)$



- $(-\infty, -1]$



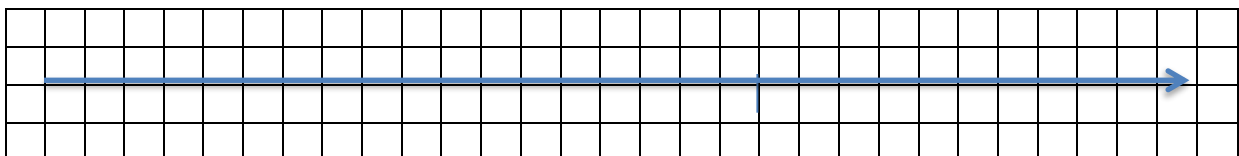
 Stabiliți dacă:

- -7 este în intervalul $(-3, 2)$
Nu deoarece relația $-3 < -7 < 2$ este falsă;
- 6 este în intervalul $[6, \infty)$
Da deoarece relația $6 \leq 6$ este adevărată;
- -5 este în intervalul $(-\infty, -2]$
Da deoarece relația $-5 \leq -2$ este adevărată;
- 3 este în intervalul $(3, 8]$
Nu deoarece relația $3 < 3 \leq 8$ este falsă.

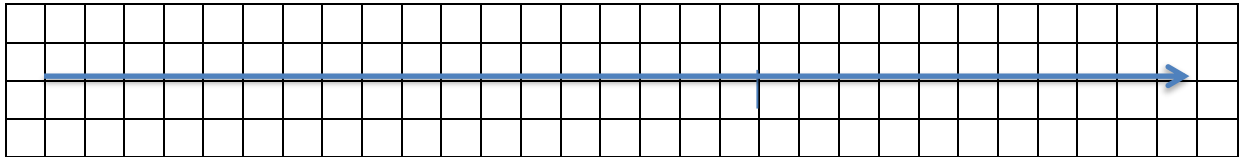
Să exersăm !

1. Reprezentați pe axa numerelor reale intervalele:

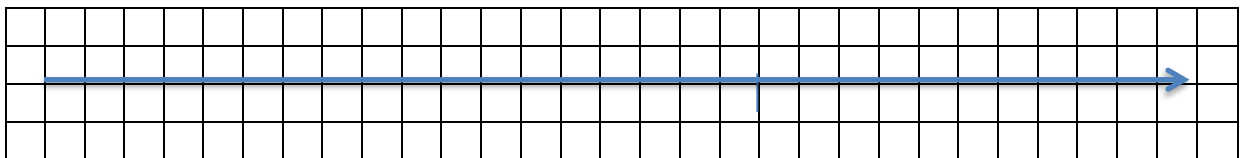
- a) $(-3, 7)$



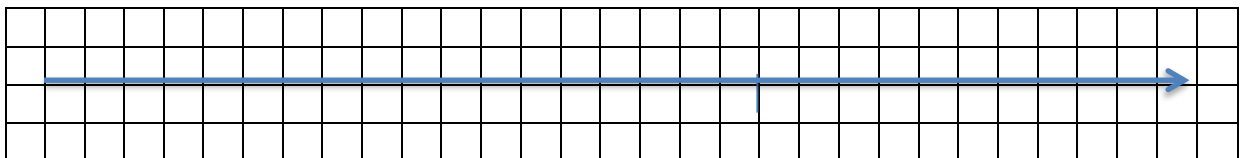
b) $[-2, 2,3]$



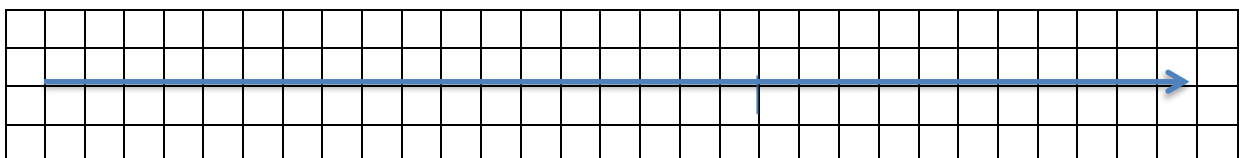
c) $(-3, 0]$



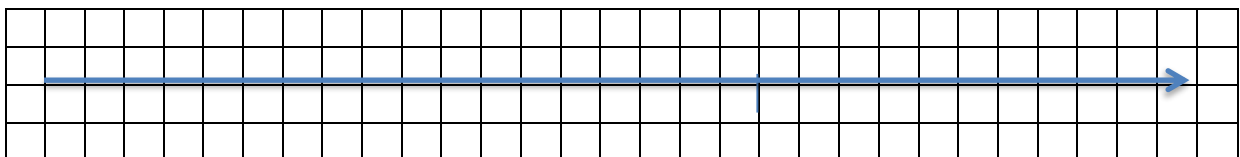
d) $[0, 5)$



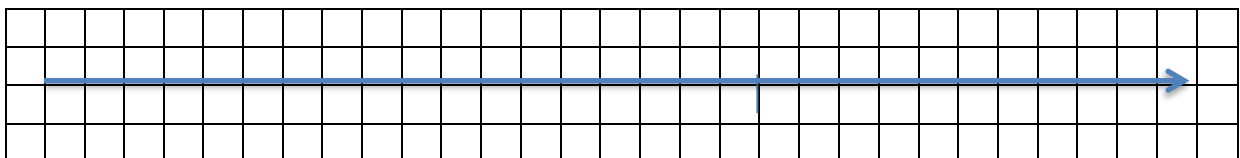
e) $(-2, \infty)$



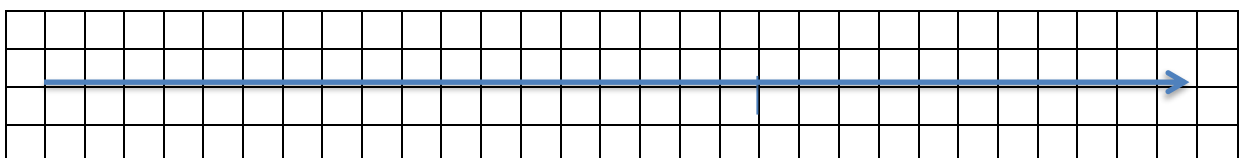
f) $(4, \infty)$



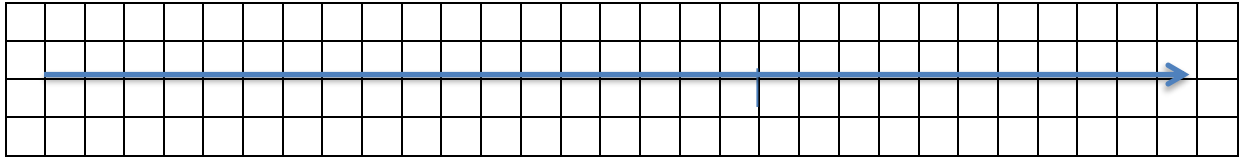
g) $[-5, \infty)$



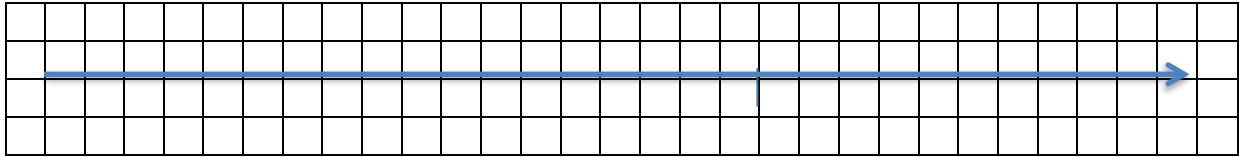
h) $(-\infty, 2,5)$



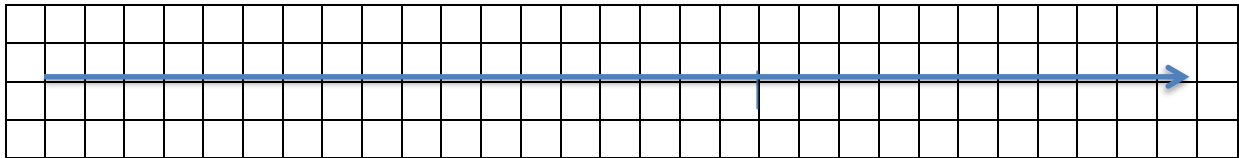
i) $(-\infty, 4,7]$



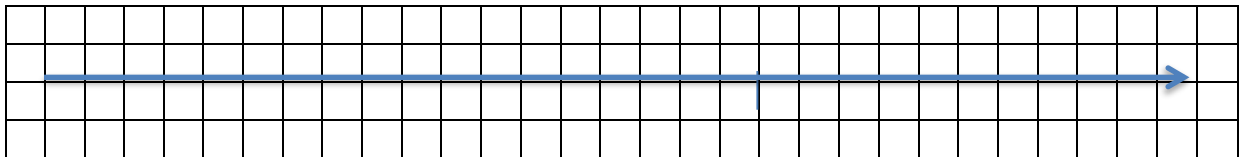
j) $(-\infty, \sqrt{2})$



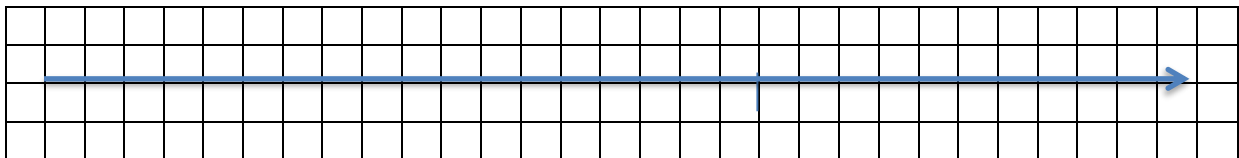
k) $[2, 3]$



l) $[2, 5)$



m) $[-4, 3)$



2. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor afirmații:

- a) 2 este în intervalul $(-7, 4)$ A / F deoarece _____
- b) -3 este în intervalul $(-3, 5)$ A / F deoarece _____
- c) 3,99 este în intervalul $(-3, 4)$ A / F deoarece _____
- d) 2,7 este în intervalul $(-\infty, 2)$ A / F deoarece _____
- e) 3,2 este în intervalul $(3, \infty)$ A / F deoarece _____
- f) 1,5 este în intervalul $[1,5, \infty)$ A / F deoarece _____

3. De dimineață temperature a fost de $-2,3^{\circ}\text{C}$ și a urcat până la prânz la 4°C . În ce interval a variat temperature azi?

Operații cu numere reale:

Adunarea și scăderea numerelor reale


- ✓ Pentru a **aduna** două numere reale trebuie să adunăm termenii asemenea:
- Două numere raționale sunt termeni asemenea.
 - Două numere iraționale de forma $x\sqrt{a}$ și $y\sqrt{a}$ sunt termeni asemenea.


$$(m + x\sqrt{a}) + (n + y\sqrt{a}) = (m + n) + (x + y)\sqrt{a}$$


- ✓ Pentru a **scădea** două numere reale trebuie să scădem termenii asemenea:


$$(m + x\sqrt{a}) - (n + y\sqrt{a}) = (m - n) + (x - y)\sqrt{a}$$

Exemple:

 $\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

 $2 + 3\sqrt{5} + 7 + 6\sqrt{5} = 9 + 8\sqrt{5}$

 $\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 5\sqrt{2} = 6\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$

 $2 + \sqrt{6} - 5 - 3\sqrt{6} = -3 - 2\sqrt{6}$

Proprietățile adunării

- ✓ **Comutativitatea:** $a + b = b + a$ pentru orice numere reale a și b .
- ✓ **Asociativitatea:** $(a + b) + c = a + (b + c)$ pentru orice numere reale a, b și c .
- ✓ **0 este element neutru:** $a + 0 = 0 + a = a$ pentru orice număr natural a .

Să exersăm !

1. Calculați:

a) $2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} =$ _____

b) $\sqrt{7} + 2\sqrt{7} =$ _____

c) $12\sqrt{3} + 16\sqrt{3} =$ _____

d) $4\sqrt{7} - 5\sqrt{7} =$ _____

e) $13\sqrt{2} - 4\sqrt{2} =$ _____

f) $15\sqrt{15} - \sqrt{15} =$ _____

g) $37\sqrt{3} - 15\sqrt{3} =$ _____

h) $12\sqrt{10} - 5\sqrt{10} =$ _____

2. Calculați:

a) $\sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{25}{16}} =$ _____

b) $2\sqrt{7} + 3\sqrt{2} - 5\sqrt{7} =$ _____



UNIUNEA EUROPEANĂ



Instrumente Structurale
2014-2020

c) $4\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 11\sqrt{2} - 5\sqrt{3} =$ _____

d) $17\sqrt{5} - 12 - 8\sqrt{5} + 4 =$ _____

e) $2\sqrt{5} - 3 + \sqrt{5} =$ _____

f) $32\sqrt{7} - 5\sqrt{2} - 3\sqrt{7} + 2 =$ _____

g) $5\sqrt{3} - 4 - 9\sqrt{3} =$ _____

h) $3\sqrt{5} - 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} =$ _____

i) $2\pi - 5\pi =$ _____

j) $2\sqrt{3} - \pi + 4\sqrt{3} - 3\pi =$ _____

Înmulțirea și împărțirea numerelor reale

✓ Prin **înmulțirea numerelor** reale a și b se obține numărul real $a \cdot b$ numit produsul numerelor a și b .

✓ a și b se numesc factori.

✓ Prin **împărțirea numerelor** reale a și $b, b \neq 0$ se obține numărul real $\frac{a}{b}$ numit raportul numerelor a și b .

$$\checkmark \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

Proprietățile înmulțirii numerelor reale

✓ **Comutativitatea:** $a \cdot b = b \cdot a$, pentru orice numere reale a și b .

✓ **Asociativitatea:** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, pentru orice numere reale a, b, c .

✓ **1 este element neutru:** $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, pentru orice număr real a .

✓ **Distributivitatea înmulțirii față de adunare și față de scădere:**

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c;$$

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c;$$

pentru orice numere reale a, b, c .

✓ Dacă $a = b$, atunci $a \cdot c = b \cdot c$, pentru orice numere naturale a, b, c .

✓ $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, pentru orice număr real a .

✓ Dacă a este un număr real nenul **inversul lui a** este numărul real $\frac{1}{a}$.

Reguli de calcul cu radicali:

✓ $x \cdot \sqrt{a} = x\sqrt{a}$, pentru orice numere reale x și a .

✓ $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, pentru orice numere reale a și b .

✓ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, pentru orice numere reale strict pozitive a și b .

✓ $x\sqrt{a} \cdot y\sqrt{b} = x \cdot y \cdot \sqrt{a \cdot b}$, pentru orice numere reale x, y, a și b .

✓ $x(y + \sqrt{b}) = x \cdot y + x\sqrt{b}$, pentru orice numere reale x, y și b .

✓ $-x(y + \sqrt{b}) = -x \cdot y - x\sqrt{b}$, pentru orice numere reale x, y și b .

✓ $\sqrt{a}(y + \sqrt{b}) = y\sqrt{a} + \sqrt{a \cdot b}$, pentru orice numere reale y, a și b .

- ✓ $-\sqrt{a}(y + \sqrt{b}) = -y\sqrt{a} - \sqrt{a \cdot b}$, pentru orice numere reale y, a și b .
- ✓ $(x + \sqrt{a})(y + \sqrt{b}) = x \cdot y + x\sqrt{b} + y\sqrt{a} + \sqrt{a \cdot b}$, pentru orice numere reale x, y, a și b .
- ✓ $(x - \sqrt{a})(y + \sqrt{b}) = x \cdot y + x\sqrt{b} - y\sqrt{a} - \sqrt{a \cdot b}$, pentru orice numere reale x, y, a și b .
- ✓ $(x - \sqrt{a})(y - \sqrt{b}) = x \cdot y - x\sqrt{b} - y\sqrt{a} + \sqrt{a \cdot b}$, pentru orice numere reale x, y, a și b .
- ✓ $\sqrt{a^2 \cdot x} = |a|\sqrt{x}$ (scoaterea factorilor de sub radical).
- ✓ Dacă $a > 0$ atunci $a\sqrt{x} = \sqrt{a^2 \cdot x}$ (introducerea factorilor de sub radical).

Exemple:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{2 \cdot 7} = \sqrt{14}$$

$$3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} = 15\sqrt{6}$$

$$\sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$3(5 + \sqrt{2}) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot \sqrt{2} = 15 + 3\sqrt{2}$$

$$4(1 - 2\sqrt{3}) = 4 \cdot 1 - 4 \cdot 2\sqrt{3} = 4 - 8\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}(5 + \sqrt{3}) = 5 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3} + \sqrt{9} = 5\sqrt{3} + 3$$

$$(2 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{5}) = 2 \cdot 4 - 2 \cdot \sqrt{5} + 4 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = 8 - 2\sqrt{5} + 4\sqrt{3} - \sqrt{15}$$

$$(4 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3}) = 4 \cdot 4 - 4 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 16 - \sqrt{9} = 16 - 3 = 13$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 25} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{25} = \sqrt{2} \cdot 5 = 5\sqrt{2}$$

$$5\sqrt{8} = 5\sqrt{4 \cdot 2} = 5 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

$$\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

Să exersăm !

1. Calculați:

a) $2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{5} =$ _____

b) $12\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} =$ _____

c) $11\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7} =$ _____

d) $-\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{3} =$ _____

Aproximări. Estimări

Să ne amintim!

Aproximarea prin lipsă reprezintă înlocuirea numărului cu un număr mai mic sau egal.

Aproximarea prin adaos reprezintă înlocuirea numărului cu un număr mai mare.


Aproximarea la un anumit ordin (zecime, sutime, unități, zeci, sute) se face astfel:

- se citește cifra din dreapta ordinului la care se face aproximarea;
- ◇ dacă numărul se aproximează prin lipsă atunci ea și cifrele care urmează se înlocuiesc cu 0 (se neglijează);
- ◇ dacă numărul se aproximează prin adaos atunci ea și cifrele care urmează se înlocuiesc cu 0, iar cifra ordinului la care se face aproximarea se mărește cu o unitate.



În practică, pentru a *estima* dacă anumite cantități sau resurse sunt suficiente se face o *aproximare prin adaos*.

Exemplu:

 Marian vrea să împrejmuiască o grădină de formă pătrată cu suprafața de 200 m^2 .

- Câți metri de gard sunt necesari?
- De ce sumă are nevoie pentru a confecționa gardul dacă un panou de gard cu dimensiunile $1,20 \text{ m} \times 2,5 \text{ m}$ de gard costă 229,20 lei?

Reține: În plus trebuie să adauge 25% din prețul gardului la cheltuieli pentru alte necesități (alte materialele: cuie, stâlpi și manoperă).

- Dacă l este lungimea laturii grădinii atunci

$$l^2 = 200 \text{ m}^2 \Rightarrow l = \sqrt{200} \text{ m} \Rightarrow l = \sqrt{2 \cdot 100} \text{ m}$$

$$\Rightarrow l = 10\sqrt{2} \text{ m}$$

$$\Rightarrow l = 14,142135... \text{ m}$$

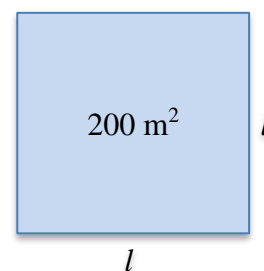
Aproximând prin adaos la zecimi obținem o latură $l = 14,15 \text{ m}$

Sunt necesari aproximativ $4l = 56,60 \text{ m}$ de gard

- Sunt necesare $56,60 : 2,5 = 22,64$ panouri. Trebuie cumpărate deci 23 de panouri de gard care costă $23 \cdot 229,20 \text{ lei} = 5271,60 \text{ lei}$

Celelalte cheltuieli sunt în valoare de $\frac{25}{100} \cdot 5271,60 \text{ lei} = 1317,90 \text{ lei}$

Total cheltuieli: $5271,60 \text{ lei} + 1317,90 \text{ lei} = 6589,50 \text{ lei}$ adică aproximativ 6590 lei.



3. Maria vrea să își aranjeze o grădină de flori cu suprafața de 20 m^2 ca în figura de mai jos. În zona galbenă vrea să planteze flori,

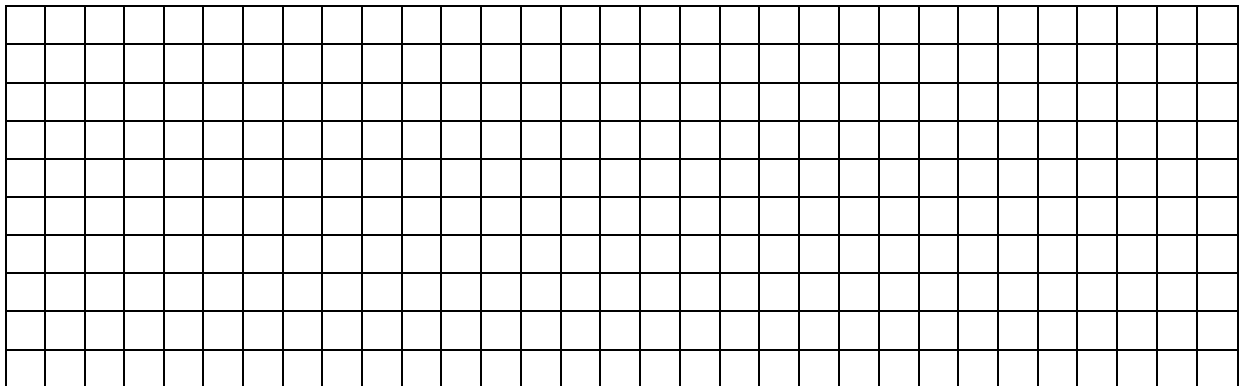
iar în zona verde să planteze gazon. Lățimea grădinii este de 4 m . Norma de însămânțare la flori este de $10/8 \text{ m}^2$, iar la gazon 25 g/m^2 . Un pachet de semințe de flori de 10 g costă 12 lei , iar o pungă cu semințe de gazon de 1 kg costă 55 lei .

4 m

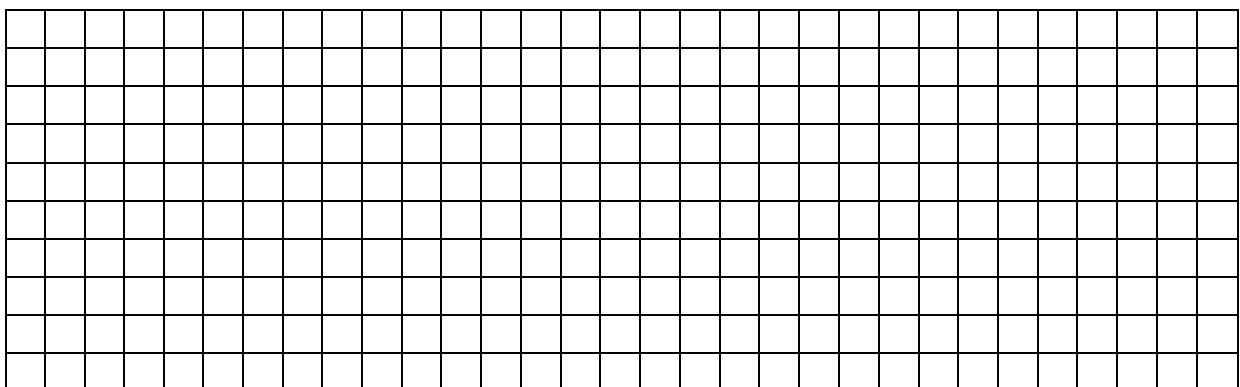


Reține: suprafața grădinii de flori se calculează după formula $\pi \cdot r^2$, unde r este raza cercului

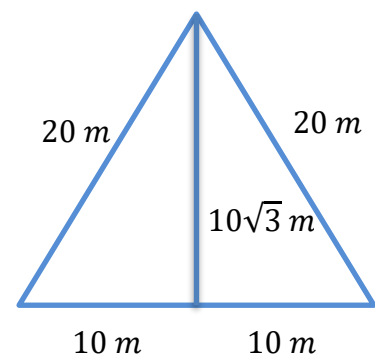
- a) Cât vor costa semințele pentru flori?



- b) Cât vor costa semințele pentru gazon?



4. Alin vrea să amenajeze în curte câteva alei ca în figura alăturată(cu albastru sunt macate aleile). El a cumpărat pavele pentru 78 m de alei. Stabiliți dacă sunt suficiente aceste pavele.



Calculare cu numere reale reprezentate prin litere

Expresii algebrice

- ✓ expresie sub forma unui produs în care factorii sunt numere sau litere este **expresie algebrică simplă**.
- ✓ expresie obținută prin adunarea, scăderea, înmulțirea sau împărțirea unor expresii algebrice simple nenule se numește **expresia algebrică**.
- ✓ Literele care apar în expresie reprezintă numere reale neprecizate.
- ✓ O expresie algebrică simplă se poate scrie $E = c \cdot l$, unde c este un număr real numit coeficient, iar l este partea literală.

Exemple:

✎ În expresia $-3ax^3b$ numărul -3 este coeficient, iar ax^3b este partea literală.

✎ În expresia $2\sqrt{5}ab^4$ numărul $2\sqrt{5}$ este coeficient, iar ab^4 este partea literală.

Termeni asemenea. Operații cu expresii algebrice

- ✓ Doi termeni ai unei expresii algebrice sunt asemenea dacă au aceeași parte literală.
- ✓ Pe baza proprietății de distributivitate a înmulțirii numerelor reale în raport cu adunarea/ scăderea termenii asemenea se adună/se scad.

Exemple:

✎ $3a + 6a = 9a$

✎ $2xy - 7x + 11xy = 13xy - 7x$

✎ $3x \cdot 4x = 3 \cdot 4 \cdot x \cdot x = 12x^2$

✎ $2a(5 - 3a) = 2a \cdot 5 - 2a \cdot 3a = 10a - 6a^2$

✎ $3x(4a - b) = 3x \cdot 4a - 3x \cdot b = 12xa - 3xb$

✎ $3x^2y : (6xy) = \frac{3x^2y}{6xy} = \frac{x}{2} = 0,5x$

$$\pencil 12ax^2 : (3a) = \frac{12ax^2}{3a} = 4x^2$$

Să exersăm !

Calculați:

a) $17a - 5a =$ _____

b) $23a + 19a =$ _____

c) $2a - 7a + 5a =$ _____

d) $25x - 14y + 5y =$ _____

e) $2,5x + 3,9x =$ _____

f) $1,41x - 2,3x =$ _____

g) $4,6xy - 5x + 4,2xy - 3x =$ _____

h) $2 \cdot (7a + 3b) =$ _____

i) $5 \cdot (2a - 4b) =$ _____

j) $3 \cdot (11a - 6b) =$ _____

k) $3x \cdot (x - 2) =$ _____

l) $5x \cdot (x + 3) =$ _____

m) $4,2x^2y : (3x) =$ _____

n) $12,1xy^2 : (11y) =$ _____

o) $xyz^2 : (xyz) =$ _____

p) $t \cdot (2t - 5) =$ _____

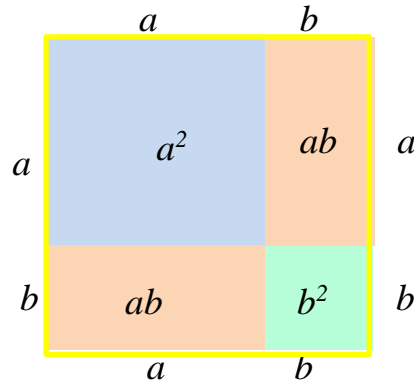
q) $2a + 5b - 3(a + b) =$ _____

r) $(4a - 2b) - (3b - 5a) =$ _____

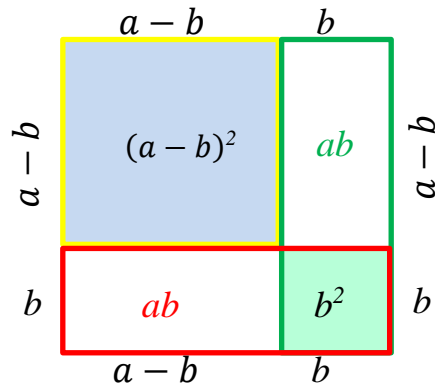
Formule de calcul prescurtat: pătratul unui binom, diferența de pătrate



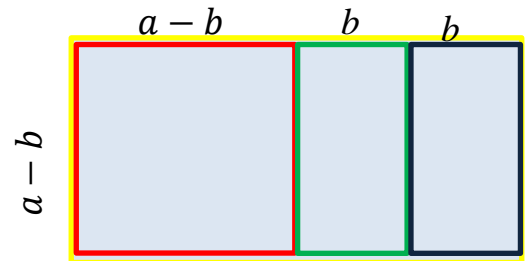
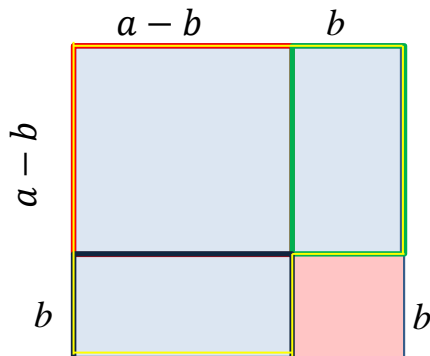
i. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



ii. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$



iii. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$



Exemple:

$$\text{✎ } (3 + x)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + x^2$$

$$\text{✎ } (\sqrt{2} - x)^2 = \sqrt{2}^2 - 2\sqrt{2} \cdot x + x^2$$

$$\text{✎ } x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$$

$$\text{✎ } (3 + \sqrt{2})^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = 9 + 6\sqrt{2} + 2 = 11 + 6\sqrt{2}$$

Ordinea efectuării operațiilor

Ordinea efectuării operațiilor cu numere reale este aceeași cu ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale, adică:

- întâi operațiile de ordinul trei (extragerea radicalului, ridicarea la putere), dacă există,
- apoi operațiile de ordinul doi (înmulțiri și împărțiri) dacă există,
- apoi operațiile de ordinul întâi (adunări și scăderi) dacă există,

respectând de fiecare dată ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta pentru operațiile de același ordin.

Exemple:

$$\text{✎ } \sqrt{5} + \sqrt{5}(3 - \sqrt{2}) = \sqrt{5} + 3\sqrt{5} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{5} - \sqrt{10}$$

$$\text{✎ } (1 + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2}^2 - 2\sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} = 3$$

Să exersăm !

1. Calculați folosind formula $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

a) $(a + x)^2 =$ _____

b) $(3 + x)^2 =$ _____

c) $(x + 5)^2 =$ _____

d) $(\sqrt{2} + 5)^2 =$ _____

e) $(4 + \sqrt{2})^2 =$ _____

f) $(3 + \sqrt{5})^2 =$ _____

g) $(\sqrt{2} + \sqrt{7})^2 =$ _____

h) $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 =$ _____

2. Calculați folosind formula $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

a) $(a - y)^2 =$ _____

b) $(2 - y)^2 =$ _____

c) $(x - 3)^2 =$ _____

d) $(\sqrt{3} - 1)^2 =$ _____

e) $(3 - \sqrt{2})^2 =$ _____

f) $(5 - \sqrt{3})^2 =$ _____

g) $(\sqrt{11} - \sqrt{3})^2 =$ _____

h) $(\sqrt{7} - \sqrt{5})^2 =$ _____

3. Calculați folosind formula $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$:

a) $(a + 3)(a - 3) =$ _____

b) $(7 + x)(7 - x) =$ _____

c) $(5 - x)(5 + x) =$ _____

d) $(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) =$ _____

e) $(\sqrt{3} - 5)(\sqrt{3} + 5) =$ _____

f) $(2 + \sqrt{7})(2 - \sqrt{7}) =$ _____

g) $(2\sqrt{5} - 1)(2\sqrt{5} + 1) =$ _____

h) $(3 + 5\sqrt{7})(3 - 5\sqrt{7}) =$ _____

4. Completați căsuțele pentru a obține relații adevărate:

a) $(a + 1)^2 = \square + 2a + 1$

b) $(z - 3)^2 = z^2 - 6z + \square$

c) $(b - 5)^2 = b^2 - \square + 25$

d) $(c + 4)^2 = c^2 - \square + 16$

e) $(x - 7)^2 = x^2 - 14x + \square$

f) $(x + 9)^2 = \square + 18x + 81$

g) $(a + \sqrt{3})^2 = a^2 - \square + 3$

h) $(x - \sqrt{7})^2 = x^2 - 2\sqrt{7}x + \square$

5. Calculați respectând ordinea efectuării operațiilor:

Probleme care se rezolvă cu ajutorul numerelor reale

Multe problemele cu un conținut practic sau aplicativ se pot rezolva introducând una sau mai multe necunoscute și obținând una sau mai multe ecuații ale căror soluții conduc la soluția problemei. Ecuațiile atasate problemei poartă numele de *model matematic* al problemei.

Etapile de rezolvare a problemelor folosind modelul matematic:

- Identificarea datelor cunoscute și a
- Identificarea datelor necunoscute și notarea cu câte o literă a fiecărei necunoscute (de obicei x, y);
- Stabilirea mulțimii în care pot lua valori necunoscutele;
- Scrierea, cu ajutorul necunoscutelor, a relațiilor date de enunțul problemei și obținerea unui model matematic (unor ecuații);
- Rezolvarea modelului matematic;
- Interpretarea rezultatului și formularea răspunsului la problemă.

Exemple:

✎ Într-un bloc sunt 5 apartamente cu 2 camere și mai multe apartamente cu 3 camere. Aflați numărul apartamentelor cu 3 camere, dacă în bloc sunt în total 55 camere.

- Date cunoscute:
 - ◇ numărul total al camerelor: 55
 - ◇ numărul apartamentelor cu 2 camere: 5
- Date necunoscute:
 - ◇ numărul apartamentelor cu 3 camere. Îl notăm cu x .
- Numărul apartamentelor este natural, deci x este număr natural.
- Modelul matematic: relația care calculează numărul camerelor

$$2 \cdot 5 + 3 \cdot x = 55$$

- Rezolvarea modelului matematic:

$$2 \cdot 5 + 3 \cdot x = 55 \Leftrightarrow$$

$$3x = 55 - 10 \Leftrightarrow$$

$$3x = 45 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{45}{3} \Leftrightarrow$$

$$x = 15$$

- Interpretarea rezultatului: *În bloc sunt 15 apartamente cu 3 camere.*

✎ La o fermă sunt 200 vaci și mai multe păsări. Aflați numărul păsărilor care sunt la fermă dacă în total sunt 1450 de picioare.

